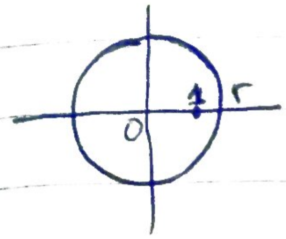
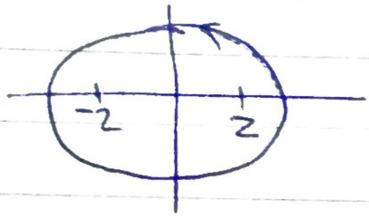
27/3/2017

Π.χ. $f(z)=z+\frac{1}{z}$



$z(t)=r(\text{συν}(t)+\text{ημ}(t))$, $t\in[0,2\pi]$

$w(t)=(r+\frac{1}{r})\text{συν}(t)+i(r-\frac{1}{r})\text{ημ}\,t$, $t\in[0,2\pi]$



* $f:\mathcal{T}\to\mathbb{C}$

$z_0:\ \lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=f'(z_0)$

$\varphi(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$, $z\neq z_0$

$f(z)=f(z_0)+\varphi(z)(z-z_0)$, $z\in\mathcal{T}$.

$\varphi:\mathcal{T}\to\mathbb{C}$, $\nexists\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=f'(z_0)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Έστω $f,g:\mathcal{T}\to\mathbb{C}$

$\exists f'(z_0), g'(z_0)$

- Πρόσθεση $(f+g)'(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0)$

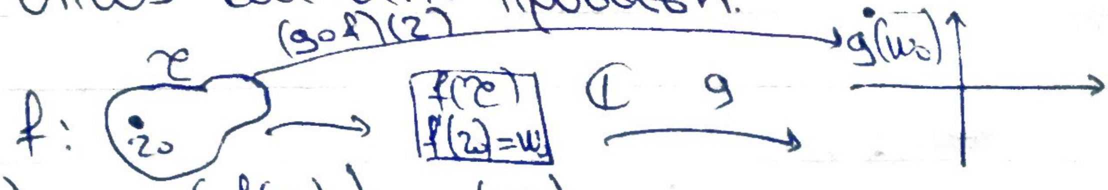
Απόδ. $\to$ $f(z)=f(z_0)+\varphi(z)(z-z_0)$

$g(z)=g(z_0)+\psi(z)(z-z_0)$

$(f+g)(z)=(f+g)(z_0)+(\varphi(z)+\psi(z))(z-z_0)$

$\lim(\varphi(z)+\psi(z))=\varphi(z_0)+\psi(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0)$

- Πολ/μός: Όπως και στην πρόσθεση.
- Σύνθεση:



$z_0\to f(z_0)\to g(f(z_0))=g(w)$

$g'(w_0)f'(z_0)=(g\circ f)'(z_0)$, $\boxed{(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))f'(z_0)}$

: κανόνας της αλυσίδας.

Αποδ.

- $f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z-z_0)$ (1) $\qquad : \varphi(z_0) = f'(z_0)$
- $g(w) = g(w_0) + \phi(w)(w-w_0)$ $\qquad : \phi(w_0) = g'(w_0)$ } (2)

$$= g(w_0) + \phi(w)(f(z) - f(z_0))$$

$$\overset{(1)}{=} g(w_0) + \phi(w)\cdot\varphi(z)(z-z_0)$$

- $g(f(z)) = g(f(z_0)) + \phi(f(z))\varphi(z)(z-z_0)$

$(g\circ f)(z) = (g\circ f)(z_0) + \phi(f(z))\varphi(z)(z-z_0)$

Είναι $\phi(f(z))\varphi(z) \xrightarrow{z\to z_0} \phi(w_0)\cdot\varphi(z_0) \overset{(2)}{=} g'(w_0)f'(z_0)$

$*\ \varphi(z) = \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, \ z\neq z_0$

$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)(z-z_0)$

$f'(z_0) = \varphi(z_0) = \lim \varphi(z)$

- Για τις ιδιότητες, ισχύει ότι ισχύει και για τις πραγματικές συναρτήσεις.

Απροσδιόριστες Μορφές

$\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)}\ \dfrac{0}{0}$ ή $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0\ (\infty)$ και $\lim\limits_{z\to z_0} g(z) = 0\ (\infty)$

Τότε εφαρμόζω:

Κανόνας L'HOSPITAL

1) $\frac{0}{0}$ $\lim\limits_{z_0} f(z) = 0 = \lim\limits_{z_0} g(z)$ & $\exists f'(z_0), g'(z_0) (\neq 0)$

$$\Longrightarrow \exists \lim_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Αποδ: Ίδια με αυτή των πραγματικών

* $0 \cdot \infty$

$f(z)\cdot h(z)$ το κάνω $\dfrac{f(z)}{\frac{1}{h(z)}} = \dfrac{0}{0}$

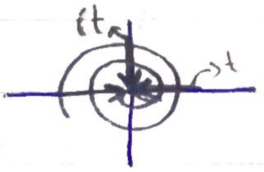
2) $z_0 \in \mathbb{C}$, $\exists r>0 : \forall z \in B(z_0, r)$, $\exists f'(z), g'(z)$ & $\exists \lim\limits_{z_0} \dfrac{f'(z)}{g'(z)} \Longrightarrow \lim\limits_{z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \lim\limits_{z_0} \dfrac{f'(z)}{g'(z)}$ Για τοί εσωτερικ σημείο

Εφαρμογή: Έστω $f(z) = \dfrac{2z^5 - z^2 + 3}{z^5 - z^2 + 2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$\lim\limits_{z \to -1} f(z) \;\Big|\; \dfrac{(2z^5 - z^2 + 3)'}{(z^5 - z^2 + 2)'} = \dfrac{10z^4 - 2z}{5z^4 - 2z}\Big|_{z=-1} = \dfrac{12}{7}$

Άρα $\lim\limits_{z \to -1} f(z) = \dfrac{12}{7}$ ▪

(*) Για το h:



(Μπορεί να $\to 0$ με κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους.)

$f'(z_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =$ $\quad z = x + iy$, $f(z) = f(x+iy) = f(x,y)$

• $t = h \in \mathbb{R}$ & $h \to 0$, κατά μήκος του πραγματικού άξονα

$= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$

$= f_x(x_0, y_0)$

• $it = h \in \mathrm{Im}$ & $t \to 0$, κατά μήκος του φανταστικού άξονα.

$= \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{it}$

$= (-i) \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}$

$= -i \cdot f_x(x_0, y_0)$

Άρα $\boxed{\begin{aligned} f_x(x_0,y_0) &= -i\, f_y(x_0,y_0) \\ \Rightarrow f_y(x_0,y_0) &= i\, f_x(x_0,y_0) \end{aligned}}$: Συνθήκες Cauchy-Rieman.

Είναι $f(z) = f(x+iy) = f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Άρα $f_x = u_x + i v_x$
$f_y = u_y + i v_y$
$f_y = i f_x$

$u_y + i v_y = i(u_x + i v_x) = i u_x - v_x$

Cauchy-Rieman: $\boxed{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}}$

(αν η f παραγωγίζεται ισχύουν)

(*) $|f(z)| = c, \ \forall z \in \mathbb{C}$

$\sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)} = c \Rightarrow u^2(x,y) + v^2(x,y) = c^2$

$\Rightarrow u_x \cdot u + v_x v = 0$ και $u_y \cdot u + v_y \cdot v = 0$

$u = v = 0 \Rightarrow f = 0.$

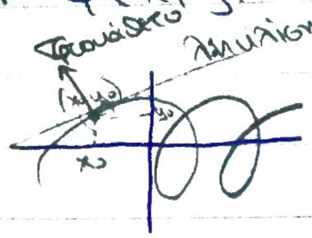
$\begin{vmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 \neq 0.$ άρα έχει λύση

$\hookrightarrow u_x = u_y = 0 = v_x = v_y$
$\hookrightarrow f'(z_0) = 0 \Rightarrow f(z) =$ ωδ, σταθ.

(άρα όταν το μέτρο είναι σταθερό, θα δείξε ότι η f είναι σταθερή)

(*)$_1$ $u(x,y) = a_1$ και $v(x,y) = a_2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

* $\varphi(x,y) = a$, $\varphi(x_0,y_0) = a$ (μπορεί να λυθεί τοπικά, σε κάθε περιοχή σημείου)



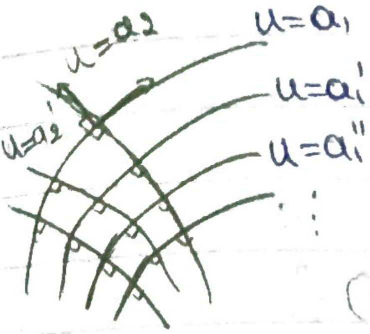
$y = y(z)$

$\varphi_x + \varphi_y y' = 0 \Rightarrow \boxed{y' = \frac{\varphi_x}{\varphi_y}} = \lambda$ η κλίση της εφαπτ.

$y' = -\frac{1}{\lambda}$ άρα το κάθετο διάνυσμα της εφ. θα

έχει κλίση: $\frac{-1}{-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}} = \frac{\varphi_y}{\varphi_x}$, άρα το κάθετο είναι (φ_x, φ_y)

• Για το $\circledast_1$



$$\nabla u \cdot \nabla v = (u_x, u_y)(v_x, v_y) =$$
$$u_x v_x + u_y v_y = u_x v_x - v_x u_x = 0$$

(Είναι παρ/μη άρα ισχύουν οι συνθ. C.Rieman)

$\circledast$ $f(z) = f(x,y)$ (1)

$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

$\circledast$ $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$

λύνω ως προς x (προσθέτοντας) : $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$

λύνω ως προς y (— " —) : $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

Άρα η (1) $= f\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}, \dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f_x \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + f_y \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = f_x \cdot \frac{1}{2} + f_y \cdot \frac{-1}{2i} = \frac{1}{2}(f_x + f_y) = 0$$

Ισχύει όταν η f είναι παρ/μη στο σημείο, είναι ισοδ. με τις 1η συνθ. Rieman

$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot z = 0 \Rightarrow z = 0$, σημείο στο οποίο η f μπορεί να παραγωγίζεται.

Η συνθήκη είναι ικανή και όχι αναγκαία:
Δηλ. μπορεί να ισχύει η συνθήκη και να μην παραγωγίζεται αλλά, αν παραγωγίζεται ισχύει σίγουρα.

* $f(0) = 0$, $\dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \dfrac{z\bar{z}}{z} = \bar{z} \xrightarrow[z \to 0]{} 0$.

π.χ. $f(z)=\dfrac{2z^2+i\bar{z}}{1+|z|^2}$. Να δω σε ποια σημεία μπορεί να παραγωγίζεται.

$\longrightarrow f(z)=\dfrac{2z^2+i\bar{z}}{1+z\bar{z}}$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{(1+z\bar{z})i-(2z^2+i\bar{z})z}{(1+|z|^2)^2} = \frac{i+iz\bar{z}-2z^3-iz\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}=0$$

Άρα $i-2z^3=0 \Rightarrow z^3=\dfrac{i}{2} \Rightarrow z=\begin{cases} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{cases}$ Πιθανά σημεία στα οποία η f παραγωγίζεται

π.χ. $f(z)=\begin{cases} \dfrac{\bar{z}^2}{z}, & z=0 \\ 0, & z=0 \end{cases}$

Παράγωγος της f στο 0: $\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0} = \dfrac{\bar{z}^2}{z^2} = \left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^2 \xrightarrow[z\to 0]{} \nexists$

Άρα $\nexists f'(0)$.

Δεν είναι παρ/μη αλλά οι συνθήκες C-Riemann ικανοποιούνται

$$f(z)=\frac{(x+iy)^2}{x+iy}=\frac{(x-iy)^3}{x^2+y^2}=\frac{x^3-3x^2iy+3x(iy)^2-(iy)^3}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{x^3-3ix^2y-3xy^2+iy^3}{x^2+y^2}$$

οπότε $u(x,y)=\dfrac{x^3-3xy^2}{x^2+y^2}$ και $v(x,y)=\dfrac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}$

$$u_x(0,0)=\lim\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x}=\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$v_y(0,0)=\lim\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y}=\frac{y^3}{y^3}=1.$$

$u_y(0,0)=\lim \dfrac{u(0,y)-u(0,0)}{y}=0$

$v_x(0,0)=\lim \dfrac{v(x,0)-v(0,0)}{x}=0$

Άρα ικανοποιείται και η 2η εξ. C-Riemann.

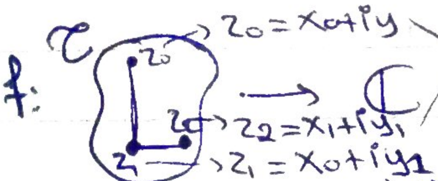
Προσοχή! Η f όμως δεν είναι παρ/μη.

Συνθήκη Ολομορφίας C-R : $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$.

Θεώρημα: Έστω ότι ισχύουν οι C-R & οι μερικές παράγωγοι u_x, v_x, u_y, v_y είναι ΣΥΝΕΧΕΙΣ
Τότε η f είναι ολόμορφη (δηλ. η f παραγωγίζεται σε κάθε σημείο)

* $f'(z)=0$.

[Για τους πραγματικούς: αν $\varphi'(x)=0$, $[a,b]$ $\rightarrow \varphi(x)=\varphi(a)+\int_a^x \varphi'(s)\,ds$. η φ είναι σταθερή.]



Από z_0 έως z_1 μεταβάλλεται μόνο το y.

$u_x=0$ Από z_0 έως z_1 $\quad u(x_0,y_1)=u(x_0,y_0)+\int_{y_0}^{y_1} u_y(x_0,s)\,ds$.

$u_y=0$

$v_x=0$ $\quad \left.\begin{array}{l} u(x_0,y_1)=u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_1)=v(x_0,y_0)\end{array}\right\} \longrightarrow f(x_0+iy_1)=f(x_0+iy_0)$

$v_y=0$

Από z_1 έως z_2 $\quad u(x_1,y_1)=u(x_0,y_1)+\int_{x_0}^{x_1} u_x(s,y)\,ds$

$\left.\begin{array}{l} u(x_1,y_1)=u(x_0,y_1) \\ v(x_1,y_1)=v(x_0,y_1)\end{array}\right\} \Longrightarrow f(x_1+iy_1)=f(x_0+iy_1)=$
$=f(x_0+iy_0)$.

* Αν $f'(z)=0 \longrightarrow f=$ σταθ. *

πχ $f(z) = \dfrac{2|z|^2+iz}{1+|z|^2} = \dfrac{2(1+|z|^2)-2+iz}{1+|z|^2} = 2+\dfrac{-2+i}{1+|z}$

$= 2 + \dfrac{-2+iz}{1+z\bar{z}}$ και βρίσκω τα σημεία στα οποία η f είναι παρ/μη.

* Έστω f, ολόμορφη.

$f'(z) = \underbrace{u_x}_{u_y}(x,y) + i\underbrace{v_x}_{v_y}(x,y) = f_x(x,y)$

$\boxed{u_y = v_x \ (1) \quad \& \quad u_x = -v_y \ (2)}$

$u_x, u_{xx}, u_{xxx} \dots$

$, u_{xy}, u_{xyx} \dots$

$v_x, v_{xx}, v_{xxx} \dots$

$u_{xy} = u_{yx}$ όταν u_{xy} είναι συνεχής

Παραγωγίζω την (1) ως προς y : $u_{yy} = v_{xy}$

και (2) ως προς x : $u_{xx} = -v_{yx}$ (+)

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$: $\Delta u = 0$: Laplace

→ Αρμονικές

$$\boxed{\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

* Όταν ισχύουν οι συνθήκες C-R & Δ=0. Τότε είναι συζυγείς αρμονικές.

Εφαρμογή

$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x$. Υπάρχει ολόμορφη f, της οποίας η u να είναι το πραγματικό μέρος,

$\rightarrow u_x = 3x^2 - 3y^2 + 1$

$u_{xx} = 6x$

$u_y = -6xy$

$u_{yy} = -6x$

$\Delta u = 0.$ Αν δεν βγαίνει 0, δεν συνεχίζω.

$u_x = u_y = -6xy$

$u(x,y) = \int(-6xy)dx + c(y) = -6\frac{x^2}{2}y + c(y) = -3x^2y + c(y)$

$u_y = -3x^2 + c'(y) = -3x^2 + 3y^2 - 1 \Rightarrow c'(y) = 3y^2 - 1$

$\Rightarrow c(y) = y^3 - y + c'.$

$v(x,y) = -3x^2y + y^3 - y + c$

Άρα $f(z) = u(x,y) + v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x + i(-3x^2y + y^3 - y + c)$

$= z^3 + z$ έγινε κάποιο λάθος πρόσημο.